

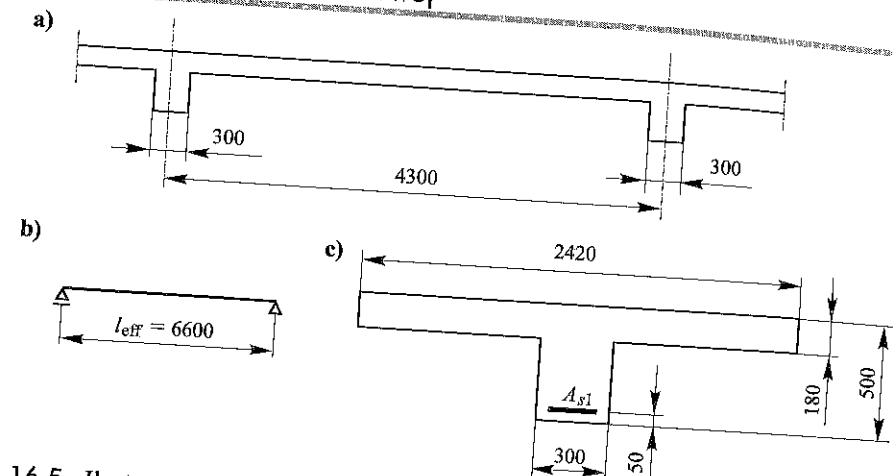
Tablica 16.3. Graniczne wartości stosunku  $l_{eff}/d$ 

Oznaczenia (wartości $\sigma_s$ i $f_{ck}$ należy podstawiać w MPa):	
$\rho_0 = 0,001 \sqrt{f_{ck}}$	
$\rho$ – wymagany (ze względu na SG nośności) stopień zbrojenia rozciąganego w środku rozpiętości (we wspornikach przy podporze),	
$\rho'$ – wymagany (ze względu na SG nośności) stopień zbrojenia ściskanego w środku rozpiętości (we wspornikach przy podporze),	
$\sigma_s$ – naprężenie w zbrojeniu rozciągającym pod wpływem miarodajnej kombinacji obciążeń w SGU w fazie II w środku rozpiętości (we wspornikach przy podporze).	
Jeżeli $\rho \leq \rho_0$ , to	$\lambda = 11 + 1,5 \sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2 \sqrt{f_{ck}} \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}$
Jeżeli $\rho > \rho_0$ , to	$\lambda = 11 + 1,5 \sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \sqrt{f_{ck}} \frac{\rho'}{\rho_0}$
$\left( \frac{l_{eff}}{d} \right)_{lim} = \frac{310}{\sigma_s} K \lambda \quad (1)$	
Wartości $K$ według tablicy 16.2. Szczegóły stosowania wzoru (1) poniżej.	
Wartości obliczone ze wzoru (1) należy zmodyfikować w następujący sposób:	
1. Przy sprawdzaniu belek teowych, w których szerokość półki jest większa od trzech szerokości żebra, stosuje się współczynnik 0,8.	
2. Przy sprawdzaniu elementów o rozpiętości przekraczającej 7 metrów (z wyjątkiem stropów bezbelkowych), podpierających ścianki działowe narażone na uszkodzenia z powodu nadmiernych ugięć, obliczone wartości mnoży się przez $7/l_{eff}$ ( $l_{eff}$ w metrach).	
3. Przy sprawdzaniu stropów bezbelkowych, w których większa z rozpiętości przekracza 8,5 metra i które podpierają ścianki działowe narażone na uszkodzenia z powodu nadmiernych ugięć, obliczone wartości mnoży się przez $8,5/l_{eff}$ ( $l_{eff}$ w metrach).	

sztywności niezarysowanego elementu sprężystego). Inny sposób to obliczenie ugięć w fazach I i II (do każdej fazy stosuje się odpowiednią sztywność) i wyznaczenie wyniku według zasady wyrażonej wzorem (16.2). Niektóre systemy komputerowe same wykonują to obliczenie (jest to możliwe tylko po wyznaczeniu zbrojenia, istotne znaczenie ma także współczynnik pełzania).

## 16.7. Przykłady

## ▼ Przykład 1. Ugięcie belki teowej



Rys. 16.5. Ilustracja do przykładu 1: a) przekrój poprzeczny stropu, b) schemat statyczny belki, c) przekrój teowy w środku rozpiętości

Dane: beton klasy C20/25 ( $E_{cm} = 30\,000$  MPa,  $f_{ctm} = 2,2$  MPa), zbrojenie 5 $\phi$ 20 ( $A_s = 15,71$  cm<sup>2</sup>) ze stali żebrowanej  $f_{yk} = 500$  MPa.

Sprawdzić, czy swobodnie podparta belka teowa o rozpiętości  $l_{eff} = 6,60$  m, będąca częścią stropu płytowo-żebrowego według rysunku 16.5, spełnia wymagania normy dotyczące stosunku  $l_{eff}/d$ .

Momenty zginające w środkowym przekroju belki:

- moment wywołany ciężarem własnym konstrukcji – 118,5 kN · m,
- moment wywołany ciężarem warstw wykończeniowych i długotrwałą częścią obciążenia zmiennego – 26,8 kN · m,
- moment wywołany ciężarem ścianki działowej i innymi długotrwałymi obciążeniami skupionymi – 31,5 kN · m.

Stopień zbrojenia

$$\rho = \frac{15,71}{30 \cdot 45} = 0,01163.$$

Smukłość belki

$$\frac{l_{eff}}{d} = \frac{6,60}{0,45} = 14,67.$$

Zgodnie z wymaganiami normy [N1]:

- ugięcie wywołane przyrostem obciążeń długotrwałych, powstającym po zakończeniu wznoszenia konstrukcji, czyli momentem

$$M_{\Delta} = 26,8 + 31,5 = 58,3 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

nie powinno przekraczać  $1/500$  rozpiętości efektywnej,

- ugięcie wywołane całym obciążeniem długotrwałym (kombinacja *quasi*-stała), czyli momentem

$$M_{gg} = 118,5 + 58,3 = 176,8 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

nie powinno przekraczać 1/250 tej rozpiętości.

Efektywna szerokość półki:

$$b_{\text{eff},1} = b_{\text{eff},2} = 0,2 \cdot 2,0 + 0,1 \cdot 6,6 = 1,06 \text{ m}, \quad b_{\text{eff}} = 0,3 + 2 \cdot 1,06 = 2,42 \text{ m}.$$

Na podstawie tablicy 16.2 przyjęto  $K = 1$ .

Stosując tablicę 16.3, otrzymuje się:

$$\rho_0 = \sqrt{20} \cdot 10^{-3} = 0,004472 < \rho = 0,01163,$$

$$\lambda = 11 + 1,5\sqrt{20} \cdot \frac{0,4472}{1,163} = 13,58.$$

Naprężenie w zbrojeniu obliczone według tablicy 13.1

$$\sigma_s = \frac{0,1768 \cdot 10^4}{0,9 \cdot 0,45 \cdot 15,71} = 277,8 \text{ MPa}.$$

**Uwaga.** Tablica 13.1 dotyczy przekrojów prostokątnych, ale zasadę obliczania naprężeń w zbrojeniu, na której opiera się ta tablica, można stosować także do przekrojów teowych z półką w strefie ściskanej – ze względu na znaczne wymiary półki ramie sił wewnętrznych w tym przykładzie można było uznać za równe  $0,9d$ .

Ze wzoru (1) w tablicy 16.3, uwzględniając uwagę 1, otrzymuje się

$$\left(\frac{l_{\text{eff}}}{d}\right)_{\text{lim}} = 0,8 \frac{310}{277,8} 1,0 \cdot 13,58 = 12,12 < \frac{l_{\text{eff}}}{d} = 14,67, \quad \text{a więc belka jest za niska.}$$

### ▼ Przykład 2. Obliczenie ugięcia belki z przykładu 1 ogólną metodą normy

Zakłada się, że zastosowany zostanie cement rodzaju *N* i że rozpatrywany element będzie znajdował się we wnętrzu ( $RH = 50\%$ ).

Miarodajny wymiar

$$A_c = 4,30 \cdot 0,18 + 0,30(0,50 - 0,18) = 0,87 \text{ m}^2,$$

$$u = 2 \cdot 4,30 - 0,30 = 8,30 \text{ m},$$

$$h_0 = \frac{2 \cdot 0,87}{8,30} = 0,2096 \approx 0,21 \text{ m}.$$

**Uwaga.** Miarodajny wymiar ma charakteryzować tempo wysychania elementu – dlatego obliczono go, zakładając, że przekrój jest teowy, a płyta ma szerokość 4,30 m. Obliczając obwód tego przekroju, pominięto dwa odcinki o długości równej grubości półki, wzdłuż których rozpatrywany przekrój łączy się z sąsiednimi. Warto zapamiętać, że przekrój poprzeczny, który stosuje się do obliczania zbrojenia (rys. 16.5c), może różnić się od przekroju, który należy zastosować do obliczenia miarodajnego wymiaru.

### Skurecz betonu

Z tablicy 2.3 odczytujemy końcowe odkształcenie skurczu przy  $h_0 = 100 \text{ mm}$ :  
 $(0,025 + 0,54) \cdot 10^{-3} = 0,565 \cdot 10^{-3}$

Przyjmując na podstawie rysunku 2.20  $k_{\sigma} = 0,84$ , otrzymuje się

$$\varepsilon_{cs} = 0,84 \cdot 0,565 \cdot 10^{-3} = 0,476 \cdot 10^{-3}.$$

### Pełzanie betonu

Z wykresu na rysunku 2.26 otrzymuje się  $\varphi(\infty, 28) = 2,85$ . Taki współczynnik pełzania jest odpowiedni, gdy obciążenie zostaje przyłożone po 28 dniach, a w całym okresie przed przyłożeniem obciążenia temperatura wynosi  $20^\circ\text{C}$ . W rzeczywistości obciążenie nakładane jest stopniowo – ciężar własny po usunięciu podpór deskowania, inne obciążenia stałe później. Ponadto wilgotność środowiska przed zamknięciem budynku będzie zapewne większa. Te dwa czynniki wpływają na zmniejszenie współczynnika pełzania w porównaniu z  $\varphi(\infty, 28)$ . Z drugiej strony można obawiać się, że temperatura w okresie dojrzewania betonu będzie mniejsza od  $20^\circ\text{C}$ . Te wszystkie czynniki można uwzględnić, stosując metody nakładania poszczególnych obciążeń. Nie wnikając w te słabo kontrolowane na etapie projektowania szczegóły procesu wznoszenia konstrukcji, przyjęto  $\varphi(\infty, t_0) = \varphi(\infty, 28) = 2,85$ . Według tablicy 4.1:

$$E_{c,\text{eff}} = \frac{30\,000}{1 + 2,85} = 7792 \text{ MPa}, \quad \alpha_e = \frac{200\,000}{7792} = 25,66,$$

$$\alpha_1 = 25,66 \frac{15,71}{30 \cdot 45} = 0,3102, \quad H = \frac{50}{45} = 1,111,$$

$$F = \frac{242 - 30}{30} = 7,067, \quad T = \frac{18}{45} = 0,40.$$

### Faza I

$$\xi = \frac{0,5 \cdot 1,111^2 + 0,3102 + 0,5 \cdot 7,067 \cdot 0,4^2}{1,111 + 0,3102 + 7,067 \cdot 0,4} = 0,3514,$$

$$\frac{J_1}{bd^3} = \frac{1,111^3}{12} + 1,111(0,5 \cdot 1,111 - 0,3514)^2 + 0,3102(1 - 0,3514)^2 + \frac{7,067 \cdot 0,4^3}{12} + 7,067 \cdot 0,4(0,3514 - 0,5 \cdot 0,4)^2 = 0,3936,$$

$$J_1 = 0,3936 \cdot 0,30 \cdot 0,45^3 = 0,01076 \text{ m}^4.$$

Odległość zbrojenia od środka ciężkości przekroju wynosi

$$0,45(1 - 0,3514) = 0,2919 \text{ m}.$$

Moment statyczny zbrojenia względem środka ciężkości przekroju

$$S_1 = 15,71 \cdot 10^{-4} \cdot 0,2919 = 0,0004585 \text{ m}^3.$$

**Faza II**

Zakłada się, że przekrój jest pozornie teowy. Według tablicy 4.1:

$$\alpha_1 = 25,66 \frac{15,71}{242 \cdot 45} = 0,03702,$$

$$\xi = \sqrt{0,03702^2 + 2 \cdot 0,03702} - 0,03702 = 0,2376,$$

$x = 0,2376 \cdot 0,45 = 0,1069 < 0,18$  m, a więc przekrój jest, jak założono, pozornie teowy,

$$\frac{J_{II}}{b_{\text{eff}} d^3} = \frac{0,2376^3}{3} + 0,03702(1 - 0,2376)^2 = 0,02599,$$

$$J_{II} = 0,02599 \cdot 2,42 \cdot 0,45^3 = 0,005731 \text{ m}^4.$$

Odległość zbrojenia od środka ciężkości przekroju  $0,45(1 - 0,2376) = 0,3431$  m.  
Moment statyczny zbrojenia względem środka ciężkości przekroju

$$S_{II} = 15,71 \cdot 10^{-4} \cdot 0,3431 = 0,0005390 \text{ m}^3.$$

Charakterystyka przekroju niezbrojonego:

- położenie środka ciężkości

$$x = \frac{0,5 \cdot (2,42 - 0,30) \cdot 0,18^2 + 0,5 \cdot 0,30 \cdot 0,50^2}{(2,42 - 0,30) \cdot 0,18 + 0,30 \cdot 0,50} = \frac{0,07184}{0,5316} = 0,1351 \text{ m},$$

- moment bezwładności

$$J_0 = \frac{0,30 \cdot 0,50^3}{12} + 0,30 \cdot 0,50(0,5 \cdot 0,50 - 0,1351)^2 + \frac{(2,42 - 0,30) \cdot 0,18^3}{12} + (2,42 - 0,30) \cdot 0,18 \cdot (0,1351 - 0,5 \cdot 0,18)^2 = 0,006911 \text{ m}^4,$$

- dolny wskaźnik wytrzymałości

$$W = \frac{6,911 \cdot 10^{-3}}{0,5 - 0,1351} = 0,01875 \text{ m}^3.$$

Moment rysujący  $M_{cr} = 2,2 \cdot 0,01875 = 0,04125 \text{ MN} \cdot \text{m} = 41,25 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

Według wzorów (16.13):

$$B_I = 7792 \cdot 0,01076 = 83,84 \text{ MN} \cdot \text{m}^2, \quad B_{II} = 7792 \cdot 0,005731 = 44,66 \text{ MN} \cdot \text{m}^2.$$

**Obciążenie momentem**  $M_{gg} = 176,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Według wzoru (16.4)

$$\zeta = 1 - 0,5 \left( \frac{0,04125}{0,1768} \right)^2 = 0,9728.$$

Stosując współczynniki  $\alpha_M$  i  $\alpha_{cs}$  określone w punkcie 16.5, otrzymuje się:

$$\alpha_M M_{gp} f_{\text{eff}}^2 = \frac{5}{48} 0,1768 \cdot 6,6^2 = 0,8022 \text{ MN} \cdot \text{m}^3,$$

$$\alpha_{cs} E_s \varepsilon_{cs} f_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{8} \cdot 200\,000 \cdot 0,476 \cdot 10^{-3} \cdot 6,6^2 = 518,3 \text{ MN}.$$

Podstawiając do wzorów (16.14) i (16.15), a następnie (16.12) otrzymuje się:

$$f_I = \frac{0,8022}{83,84} = 0,0096 \text{ m}, \quad f_{cs,I} = -\frac{518,3 \cdot 0,0004585}{83,84} = 0,0028 \text{ m},$$

$$f_{II} = \frac{0,8022}{57,31} = 0,014 \text{ m}, \quad f_{cs,II} = -\frac{518,3 \cdot 0,0005390}{57,31} = 0,0049 \text{ m},$$

$$f = (1 - 0,9728)(0,0096 + 0,0028) + 0,9728(0,014 + 0,005) = 0,0003 + 0,185 \approx 0,0185 \text{ m},$$

$$f \approx 1,85 \text{ cm} < \frac{660}{250} = 2,64 \text{ cm}.$$

Jak widać, ścisłe obliczenie ugięcia, w przeciwieństwie do oceny na podstawie tablic, wykazuje, że pod wpływem całego obciążenia *quasi*-stałego ugięcie jest mniejsze (i to znacznie) od dopuszczalnego.

**Ugięcie wywołane przyrostem momentu**  $M_{\Delta} = 58,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Zgodnie z zasadą przedstawioną w punkcie 16.5.2 obliczenie wykonano, zakładając, że w chwili zakończenia procesu wznoszenia konstrukcji pełzanie i skurcz są jeszcze zerowe. Ugięcie wywołane momentem  $M_{gg} - M_{\Delta} = 118,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$  wyznacza się zatem, zakładając, że obciążenie jest krótkotrwałe.

Tok obliczeń jest taki sam jak w poprzednim punkcie przykładu (stosuje się wzory z tablicy 4.1 i wzory (16.12)–(16.15)):

$$\alpha_e = \frac{200\,000}{30\,000} = 6,666,$$

$$\alpha_1 = 6,667 \frac{15,71}{30 \cdot 45} = 0,07758.$$

Zmienne  $H$ ,  $F$  i  $T$  mają wartości takie jak w poprzednim punkcie przykładu:  $H = 1,111$ ,  $F = 7,067$ ,  $T = 0,40$ .

**Faza I**

$$\xi = \frac{0,5 \cdot 1,111^2 + 0,07758 + 0,5 \cdot 7,067 \cdot 0,4^2}{1,111 + 0,07758 + 7,067 \cdot 0,4} = 0,3138,$$

$$\frac{J_I}{bd^3} = \frac{1,111^3}{12} + 1,111(0,5 \cdot 1,111 - 0,3138)^2 + 0,07758(1 - 0,3138)^2 + \frac{7,067 \cdot 0,4^3}{12} + 7,067 \cdot 0,4(0,3138 - 0,5 \cdot 0,4)^2 = 0,290,$$

$$J_I = 0,290 \cdot 0,30 \cdot 0,45^3 = 0,007928 \text{ m}^4.$$

**Faza II**

Przekrój jest pozornie teowy:

$$\alpha_1 = 6,666 \frac{15,71}{242 \cdot 45} = 0,009616,$$

$$\xi = \sqrt{0,009616^2 + 2 \cdot 0,009616} - 0,009616 = 0,1294,$$

$$\frac{J_{II}}{b_{\text{eff}} d^3} = \frac{0,1294^3}{3} + 0,009616(1 - 0,1294)^2 = 0,008011,$$

$$J_{II} = 0,008011 \cdot 2,42 \cdot 0,45^3 = 0,001767 \text{ m}^4,$$

$$B_I = 30\,000 \cdot 0,007928 = 237,8 \text{ MN} \cdot \text{m}^2, \quad B_{II} = 30\,000 \cdot 0,001767 = 53,01 \text{ MN} \cdot \text{m}^2.$$

Obciążenie momentem  $M_{qg} = 118,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Według tablicy 4.1a:

$$\zeta = 1 - 0,5 \left( \frac{0,04125}{0,1185} \right)^2 = 0,9394,$$

$$\alpha_M M_{qp} l_{eff}^2 = \frac{5}{48} 0,1185 \cdot 6,6^2 = 0,5377 \text{ MN} \cdot \text{m}^3,$$

$$f_I = \frac{0,5377}{237,8} = 0,00226 \text{ m},$$

$$f_{II} = \frac{0,5377}{53,01} = 0,0101 \text{ m},$$

$$f = (1 - 0,9394)0,0026 + 0,9394 \cdot 0,0101 = 0,0002 + 0,0095 = 0,0097 \text{ m}.$$

Przyrost ugięcia wywołany obciążeniem długotrwałym po zakończeniu wznoszenia budowli

$$\Delta f = 1,85 - 0,97 = 0,88 \text{ cm} < \frac{660}{500} = 1,32 \text{ cm}.$$

Ścisłe obliczenie wykazuje więc, że belka, która nie spełniała uproszczonych wymagań ze względu na smukłość, spełnia wymagania normy i to ze sporym nadstatkiem.

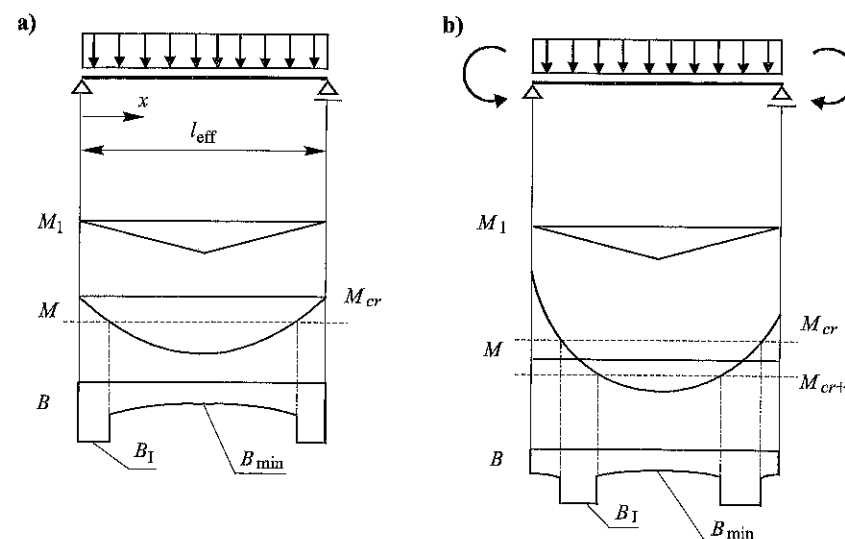
W obliczeniach dotyczących obciążenia długotrwałego uderzająco duży jest wpływ skurczu. Skurcz betonu – w ogóle nieuwzględniany przez normę polską [N5] – według [N1] wywołuje około 40% całego ugięcia. Należy jednak zauważyć, że w tym przykładzie założono warunki generujące duży skurcz (suche środowisko we wnętrzu budynku, niska klasa betonu).

## Dwuosiowy rozkład naprężeń i projektowanie za pomocą modeli ST

### 17.1. Uwagi wstępne

Zwykle projektowanie belek i słupów można oprzeć na rozpatrywaniu sił wewnętrznych, równoległych do osi elementu – wtedy obliczone zbrojenie podłużne zależy wyłącznie od momentu zginającego i siły podłużnej. Przy podporach, gdzie istotną rolę odgrywają siły poprzeczne, trzeba rozpatrzyć siły jednostkowe działające ukośnie. Zwykle zakłada się, że siły wywołane naprężeniami normalnymi i siły wywołane naprężeniami stycznymi można rozpatrywać oddzielnie. Zbrojenie podłużne zależy wtedy tylko od naprężeń normalnych, działających w przekrojach poprzecznych elementów, a zbrojenie poprzeczne od naprężeń stycznych. Tę nie całkiem doskonałą zasadę koryguje się na etapie konstruowania; stosując tzw. zasadę dodawania sił do zasady rozsuwania obwiedni sił w zbrojeniu. W ten sposób, w najczęściej stosowanych elementach prętowych problem wyznaczania zbrojenia na odcinkach, na których naprężenia główne nie są równoległe do kierunków zbrojenia (podłużnego i poprzecznego) znajduje zupełnie zadowalające, elementarne rozwiązanie.

W przypadku projektowania belki-ściany lub innego elementu konstrukcji, którego modelem jest tarcza (np. krótki wspornik, naroże ramy, inny szczegół konstrukcji), w którym istotną rolę odgrywa dwuosiowy rozkład naprężeń) ta prosta metoda nie jest wystarczająca. Trzeba obliczyć i zastosować zbrojenie dwukierunkowe. Idealnym rozwiązaniem jest zbrojenie zgodne z kierunkami głównych naprężeń rozciągających (zbrojenie trajektoriale), ale praktyczne skonstruowanie zbrojenia, które byłoby ścisłe trajektoriale, nie jest możliwe. Zwykle stosuje się zbrojenie ortogonalne, tzn. zbrojenie z dwóch rodzin prostopadłych do siebie prętów. Kierunki prętów dostosowane do kierunków naprężeń głównych w tych punktach, w których naprężenia są największe – w pozostałej części konstrukcji kierunki zbrojenia nie pokrywają się z kierunkami głównych sił.



Rys. 16.3. Obliczanie ugięć: a) belka swobodnie podparta, b) przęsło belki ciągłej

nie nieliniowe zadanie, w którym związek moment zginający-krzywizna dany jest przedstawionymi powyżej zależnościami, a momenty zginające zależą od rozkładu zbrojenia.

Przybliżenie pierwszego stopnia polega na ścisłym rozwiązywaniu fizycznie nieliniowego zadania, w którym zależność  $M-\kappa$  pełni rolę związku fizycznego. Metodami iteracyjnymi lub przyrostowymi uzyskuje się rozwiązania, w których rozkład momentów jest zgodny z rozkładem sztywności. Takie rozwiązanie jest zadowalające z matematycznego punktu widzenia, ale pomimo tego nie można spodziewać się ścisłej zgodności teorii z wynikami obserwacji, gdyż przecież budując związek  $M-\kappa$ , zastosowano wiele uproszczeń, a w szczególności nie rozróżniano odmiennych praw rządzących procesami obciążania i odciażania (w ogóle nie rozpatrywano odciażania). Ponadto, w obliczeniach rozpatruje się schemat statyczny, który, bardzo często buduje się przyjmując, że rozpatrywany ustrój jest belką, a w rzeczywistości poważny wpływ na odkształcenia może mieć przestrzenna współpraca różnych elementów konstrukcji, zwłaszcza w konstrukcjach monolitycznych. Rozwiązania na tym poziomie przybliżenia rzadko znajdują zastosowania w praktyce, gdyż na praktycznej pracy potrzebny do uzyskania rozwiązania wydaje się nieproporcjonalny do wariantu zagadnienia i wiarygodności założeń.

Wiadomo, że gdy zbrojenie nie odbiega silnie od zbrojenia wyznaczonego klasycznym sposobem, tzn. na podstawie momentów zginających obliczonych przy założeniu, że sztywność jest stała i równa sztywności początkowej elementu niezbrojonego (zbrojenie takie bywa nazywane sprężystozgodnym), to rozwiązanie klasyczne

jest niezłym przybliżeniem rozkładu momentów wyznaczonego ściśle. Można więc wyznaczać ugięcia belek statycznie niewyznaczalnych podobnie jak ugięcia belek statycznie wyznaczalnych, rozpatrując wydzielone przęsła jako pręty obciążone obciążeniem na zastąpieniu ustroju statycznie niewyznaczalnego wydzielonymi przęsłami, dla których wykonuje się numeryczne całkowania według wzoru (16.1). Rozwiązania na tym poziomie bywają stosowane w niektórych komercyjnych programach komputerowych.

Zwykle sprawdzenie ugięć wykonuje się tylko dla obciążeń długotrwałych (takie są wymagania normy). Na dodatkową uwagę zasługują elementy, w których obciążenie długotrwałe jest na tyle małe, że nie wywołuje momentu przekraczającego moment rysujący. Pomimo tego całe obciążenie (tzn. długotrwałe plus krótkotrwałe) zwykle jest większe od obciążenia rysującego. W tej sytuacji zastosowanie sztywności  $B_I$  do obliczenia ugięć byłoby błędem – trzeba zakładać, że element jest zaryzowany. Do obliczenia sztywności można zastosować zależność moment zginający-krzywizna pokazaną na rysunku 16.2 linią kropkowaną.

## 16.5. Przybliżone obliczanie ugięć na podstawie najmniejszej sztywności przęsła

### 16.5.1. Podstawowe wzory

Nieźle przybliżenie ugięcia można otrzymać, zakładając, że w każdym przęśle sztywność jest stała i równa sztywności w środku przęsła ( $B_{\min}$  na rysunku 16.3).

Aproksymacja jest zupełnie dobra dlatego, że największy wpływ na wynik całkowania ma centralna część wykresów momentów, a w tej części na ogół sztywność zmienia się nieznacznie. Jeżeli przyjmie się, że sztywność przekroju jest stała w całym przęśle, to można zastosować znane z mechaniki ustrojów sprężystych wzory:

$$f = \alpha_M \frac{M_{\max}}{B} l_{\text{eff}}^2, \quad (16.10)$$

$$\alpha_M = \frac{1}{l_{\text{eff}}^2} \int_{l_{\text{eff}}} M_1 \frac{M}{M_{\max}} dx, \quad (16.11)$$

w których  $f$  oznacza ugięcie,  $M_{\max}$  maksymalny moment w środku przęsła (we wsporniku na podporze), a  $\alpha_M$  jest współczynnikiem zależnym od kształtu wykresu momentów zginających.

Na podstawie zasady (16.2)

$$f = (1 - \zeta)(f_I + f_{I,cs}) + \zeta(f_{II} + f_{II,cs}), \quad (16.12)$$

$$B_I = E_{c,eff} J_I, \quad B_{II} = E_{c,eff} J_{II}, \quad (16.13)$$

$$f_I = \alpha_M \frac{M_{\max} l_{eff}^2}{B_I}, \quad f_{I,cs} = -\alpha_{cs} \frac{E_s \varepsilon_{cs} S_I l_{eff}^2}{B_I}, \quad (16.14)$$

$$f_{II} = \alpha_M \frac{M_{\max} l_{eff}^2}{B_{II}}, \quad f_{II,cs} = -\alpha_{cs} \frac{E_s \varepsilon_{cs} S_{II} l_{eff}^2}{B_{II}}. \quad (16.15)$$

Zakładając, że odkształcenie skurczu jest jednakowe na całej długości elementu przyjmuje się  $\alpha_{cs} = 0,125$ .

Współczynniki  $\alpha_M$  odpowiednie dla schematów statycznych według rysunku 16.4 można obliczyć ze wzorów:

schemat a)  $M = \frac{q l_{eff}^2}{8},$

schemat b)  $M = M,$

schemat c)  $M = \xi P l_{eff} \left( \text{dla } \xi \leq \frac{1}{2} \right),$

schemat d)  $M = \frac{1}{2}(M_A + M_B) + \frac{q l_{eff}^2}{8} + \frac{1}{2} \frac{(M_B - M_A)^2}{q l_{eff}^2},$

schemat e)  $M = -\frac{1}{2} q (\xi l_{eff})^2,$

schemat f)  $M = -\xi P l_{eff},$

$$\alpha_M = \frac{5}{48},$$

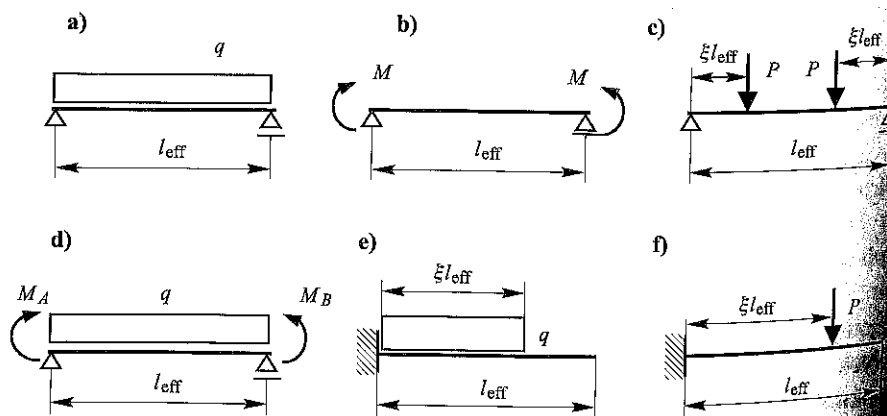
$$\alpha_M = \frac{1}{8},$$

$$\alpha_M = \frac{1}{8} - \frac{\xi^2}{6},$$

$$\alpha_M = \frac{5}{48} \left( 1 + \frac{M_A + M_B}{10M} \right),$$

$$\alpha_M = -\frac{\zeta(4 - \xi)}{12},$$

$$\alpha_M = -\frac{\xi(3 - \xi)}{6}.$$



Rys. 16.4. Obliczanie ugięć – schematy statyczne

Oczywiście, należy pamiętać o umieszczonych na końcu punktu 16.4 uwagach, dotyczących małych obciążeń długotrwałych i nawet do elementów, które nie są zarysowane pod wpływem obciążenia długotrwałego, stosować sztywność wyznaczoną z uwzględnieniem zarysowania. Zagadnienie to jest szczegółowo rozwinięte, np. w przepisach normy [N7].

Jak widać, nawet w najprostszym ujęciu, ściśle obliczanie ugięć jest zadaniem złożonym i kłopotliwym.

### 16.5.2. Obliczanie ugięć wywołanych przyrostami obciążenia

Wzory przedstawione w punktach 16.4 i 16.5.1 dotyczą ugięć, które powstają pod wpływem momentu rosnącego od zera do rozpatrywanej wartości  $M_{Ed}$ , gdyż sztywność stosowana w tych wzorach jest sztywnością średnią – przedstawia nachylenie sieciowej przechodzącej przez punkt, w którym  $M = M_{Ed}$  (rys. 16.2). Jeżeli obciążenie jest nakładane stopniowo i na element działa moment zginający, który rośnie od zera do wartości  $M_1$ , a następnie od  $M_1$  do  $M_2$ , to – w przypadku elementu z materiału sprężystego – sztywność nie zależy od momentu i ugięcia wywołane przyrostem  $\Delta M = M_2 - M_1$  można obliczyć, stosując taką samą sztywność, jak do  $M_1$  i  $M_2$ . Do elementów żelbetowych nie można stosować tej zasady.

Jeżeli rozpatruje się zagadnienie z całą ścisłością, to z powodu nieliniowego charakteru zależności moment zginający-krzywizna wzory (16.12)–(16.15) nie mogą być bezpośrednio zastosowane do obliczenia ugięcia wywołanego przyrostem momentu  $\Delta M$ , liczonym od wartości, która nie jest równa zero. W praktyce problem ten występuje przy obliczaniu przyrostu ugięcia powstającego po zakończeniu wznoszenia konstrukcji, który jest potrzebny do sprawdzenia wymagania B w punkcie 16.2.

Ugięcia wywołane przyrostem  $\Delta M$  należy obliczyć jako różnicę dwóch ugięć: wywołanego momentem  $M_{qg}$  (od całego obciążenia *quasi*-stałego) i ugięcia wywołanego momentem od obciążeń stałych, które działają bezpośrednio po ukończeniu wznoszenia konstrukcji ( $M_{qg} - \Delta M$ ). Pierwsze z tych ugięć oblicza się wprost według wzorów (16.12)–(16.15). Drugie należałoby obliczyć tą samą metodą, stosując jednak wartości skurczu i współczynnika pełzania odpowiednie do rozpatrywanej sytuacji, tzn. zależne od wieku betonu w chwili zakończenia wznoszenia konstrukcji. Tak więc, to drugie ugięcie zależy od sztywności większych niż te, które zastosowano do obliczenia pierwszego. Oszacowanie skurczu i pełzania w momencie zakończenia wznoszenia konstrukcji wymagałoby drobiazgowej analizy. Stosując teoretyczne dane dotyczące skurczu i pełzania zawarte w normie, można obliczyć potrzebne wartości – problematyczne byłyby jednak na ogół dane dotyczące temperatury, wilgotności i terminów usunięcia rusztowań, a od tych czynników zależy wynik takiego obliczenia.

Ostrożne oszacowanie przyrostu ugięcia, o którym tu mowa, otrzyma się, zakładając, że w chwili zakończenia procesu wznoszenia konstrukcji pełzanie i skurcz